УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 153, кн. 3 Физико-математические науки *2011*

УДК 514.7+517.9

ПОСТРОЕНИЕ СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЙ СИНУС-ГОРДОНА И КОРТЕВЕГА – де ФРИЗА ПРИ ПОМОЩИ СВЯЗНОСТЕЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

А.К. Рыбников

Аннотация

При помощи связностей, определяющих представления нулевой кривизны, можно строить решения типа бегущей волны (и в частности, солитонные решения) дифференциальных уравнений с частными производными. В статье приведены примеры построения солитонов уравнений синус-Гордона и Кортевега – де Фриза. Заключительный раздел посвящен сравнению предложенного метода построения солитонов с методом обратной задачи рассеяния. В работе систематически используется инвариантный аналитический метод Картана – Лаптева.

Ключевые слова: связность в главном расслоении; связность в ассоциированном расслоении; связность, определяющая представление нулевой кривизны; дифференциальное уравнение; солитоны; отображения Бэклунда.

1. Специальные связности, определяющие представления нулевой кривизны

1.1. Дифференциально-геометрические структуры, о которых идет речь в настоящей статье, ассоциированы с дифференциальными уравнениями с частными производными 2-го и 3-го порядков с неизвестной функцией z двух аргументов x^1, x^2. В работе систематически используется инвариантный аналитический метод Э. Картана – Г.Ф. Лаптева (см. [1] или работы самого Г.Ф. Лаптева [2–5]).

Переменные x^1, x^2, z мы рассматриваем как адаптированные локальные координаты (2+1)-мерного расслоения H общего типа [6] с 2-мерной базой (при этом x^1, x^2 являются локальными координатами на базе). Главные дифференциальные формы многообразия H обозначим через ω^1, ω^2, ω^{2+1} (при этом ω^1, ω^2 являются главными формами на базе). Обозначим через x^i, z, $p_{j_1\cdots j_k}$ (где $i,j=1,2$; $k=1,\ldots,r$) локальные координаты в расслоении J^rH (расслоение голономных r-струй сечений). Напомним, что $p_{j_1\cdots j_k}$ симметричны по нижним индексам. Для любого сечения $\sigma\subset H$, заданного уравнением $z=z\left(x^1,\,x^2\right)$, можно рассматривать поднятые сечения (поднятия) $\sigma^r\subset J^rH$, заданные уравнениями $z=z\left(x^1,\,x^2\right)$; $p_{j_1\cdots j_k}=z_{j_1\cdots j_k}$ $(k=1,\ldots,r)$. Здесь $z_{j_1\cdots j_k}$ – частные производные порядка k функции $z(x^1,x^2)$ по соответствующим аргументам.

Дифференциальное уравнение 2-го порядка мы рассматриваем как гиперповерхность в многообразии J^2H, заданную уравнением

$$F(x^i,z,p_j,p_{kl})=0. \tag{1}$$

На поднятии $\sigma^2\subset J^2H$ произвольного сечения $\sigma\subset H$ уравнение (1) принимает вид

$$F(x^i,z,z_j,z_{kl})=0. \tag{1'}$$

Соответственно, дифференциальное уравнение 3-го порядка – это гиперповерхность в многообразии J^3H, заданная уравнением

$$G(x^i, z, p_j, p_{kl}, p_{jkl}) = 0. \tag{2}$$

На поднятии $\sigma^3 \subset J^3H$ произвольного сечения $\sigma \subset H$ уравнение (2) принимает вид

$$G(x^i, z, z_j, z_{kl}, z_{jkl}) = 0. \tag{2′}$$

Решения $z = z\left(x^1,\, x^2\right)$ заданного дифференциального уравнения – это сечения $\sigma \subset H$, на поднятиях которых уравнение удовлетворяется тождественно.

1.2. Напомним, что главные дифференциальные формы многообразия H (формы $\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^{2+1}$) удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^{2+1} = \omega^j \wedge \omega^{2+1}_j + \omega^{2+1} \wedge \omega^{2+1}_{2+1}.$$

Формы

$$\omega^i,\ \omega^{2+1},\ \omega^{2+1}_j,\ \omega^i_j,\ \omega^{2+1}_{2+1} \tag{3}$$

представляют собой систему структурных форм расслоения R^1H (расслоение реперов первого порядка). В процессе правильного продолжения (см. об этой процедуре в [4]) возникают симметричные по нижним индексам формы

$$\omega^{2+1}_{j\,k},\ \omega^i_{j\,k},\ \omega^i_{j,\,2+1},\ \omega^{2+1}_{2+1,\,2+1}. \tag{4}$$

На следующем этапе продолжения возникают формы

$$\omega^{2+1}_{j\,k\,l},\ \omega^i_{j\,k\,l}\,\ldots,$$

также симметричные по нижним индексам.

Формы (3) и (4) в совокупности представляют собой систему структурных форм расслоения R^2H (расслоение реперов второго порядка). Заметим, что формы ω^i, ω^{2+1}, $\omega^{2+1}_{j_1\cdots j_k}$ ($k = 1, \ldots, r$) одновременно являются главными формами в многообразии r-струй J^rH.

Наряду с многообразиями реперов можно рассматривать их фактор-многообразия, и в частности:

• многообразие ${}^*R^1H$ со структурными формами $\omega^i,\ \omega^{2+1},\ \omega^{2+1}_j,\ \omega,\ \omega^2_1,\ \omega^1_2$, где $\omega = \omega^1_1 - \omega^2_2$;

• многообразие ${}^*R^2H$ со структурными формами $\omega^i,\ \omega^{2+1},\ \omega^{2+1}_j,\ \omega^{2+1}_{k\,l},\ \omega,\ \omega^2_1$, ω^1_2.

Каждое из многообразий ${}^*R^1H$ и ${}^*R^2H$ имеет структуру главного расслоения. Многообразие J^1H является базой расслоения ${}^*R^1H$, а J^2H – базой расслоения ${}^*R^2H$. Структурной группой расслоений J^kH $(k = 1, 2)$ является группа $SL(2)$ (как при $k = 1$, так и при $k = 2$). Формы $\omega,\ \omega^2_1,\ \omega^1_2$ – слоевые формы в ${}^*R^kH$ (как при $k = 1$, так и при $k = 2$). При фиксации точки базы слоевые формы превращаются в инвариантные структурные формы группы $SL(2)$.

Среди связностей, заданных в главных расслоениях ${}^*R^kH$ $(k = 1, 2)$, инвариантным образом выделяются *специальные связности* [7], то есть связности, у которых все коэффициенты связности, кроме коэффициентов при $\omega^1,\ \omega^2$, равны нулю. Обозначим через $\widetilde{\omega},\ \widetilde{\omega}^2_1,\ \widetilde{\omega}^1_2$ формы связности, соответствующие специальной связности в ${}^*R^kH$ $(k = 1, 2)$. Они связаны со слоевыми формами $\omega,\ \omega^2_1,\ \omega^1_2$ соотношениями

$$\widetilde{\omega} = \omega + \gamma_1\omega^1 + \gamma_2\omega^2, \quad \widetilde{\omega}^2_1 = \omega^2_1 + \gamma^2_{1\,1}\omega^1 + \gamma^2_{1\,2}\omega^2, \quad \widetilde{\omega}^1_2 = \omega^1_2 + \gamma^1_{2\,1}\omega^1 + \gamma^1_{2\,2}\omega^2.$$

В случае $k=1$ коэффициенты связности зависят от $x^i,\ z,\ p_j$, а в случае $k=2$ – от $x^i,\ z,\ p_j,\ p_{kl}$.

Рассматривая специальные связности в ${}^*R^kH$, можно выбрать в качестве главных форм контактные формы (инвариантное определение контактных форм можно найти в [6]):

$$\omega^i = dx^i, \quad \omega^{2+1} = dz - p_i\, dx^i, \quad \omega^{2+1}_j = dp_j - p_{jk}\, dx^k, \quad \omega^{2+1}_{jk} = dp_{jk} - p_{jkl}\, dx^l.$$

В этом случае $\omega = \omega^2_1 = \omega^1_2 = 0$. Следовательно, при таком выборе главных форм формы связности, соответствующие специальной связности, имеют вид

$$\widetilde{\omega} = \gamma_1\, dx^1 + \gamma_2\, dx^2, \quad \widetilde{\omega}^2_1 = \gamma^2_{1\,1}\, dx^1 + \gamma^2_{1\,2}\, dx^2, \quad \widetilde{\omega}^1_2 = \gamma^1_{2\,1} dx^1 + \gamma^1_{2\,2}\, dx^2. \tag{5}$$

Замечание 1. Если главные формы на J^rH – контактные, то интегральными многообразиями системы Пфаффа

$$\omega^{2+1} = 0, \quad \omega^{2+1}_{j_1\cdots j_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, r-1),$$

являются поднятые сечения $\sigma^r \subset J^rH$ сечений $\sigma \subset H$ (и только они).

Структурные уравнения, которым удовлетворяют формы (5), имеют на поднятии любого сечения $\sigma \subset H$ следующий вид:

$$\begin{aligned} d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} &= 2\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}^2_1 \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}^1_2 + \underset{\sigma}{R}_{12}\, dx^1 \wedge dx^2, \\ d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}^2_1 &= \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}^2_1 + \underset{\sigma}{R}{}^2_{112}\, dx^1 \wedge dx^2, \\ d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}^1_2 &= \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}^1_2 \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} + \underset{\sigma}{R}{}^1_{212}\, dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}},\ \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}^2_1,\ \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}^1_2$ – формы $\widetilde{\omega},\ \widetilde{\omega}^2_1,\ \widetilde{\omega}^1_2$, рассматриваемые на поднятии сечения $\sigma \subset H$, а $\underset{\sigma}{R}_{12},\ \underset{\sigma}{R}{}^2_{112},\ \underset{\sigma}{R}{}^1_{212}$ – соответствующие компоненты тензора кривизны, рассматриваемые на поднятии сечения $\sigma \subset H$.

1.3. В дальнейшем мы будем рассматривать специальные *связности в* ${}^*R^kH$, *определяющие представления нулевой кривизны* для наперед заданного уравнения (то есть связности, у которых формы кривизны обращаются в нуль на решениях уравнения и только на них). Заметим, что связности, определяющие представления нулевой кривизны, могут быть заданы также в отличных от ${}^*R^kH$ главных расслоениях над базой J^kH, но со структурной группой G, которая является подгруппой группы $SL(2)$.

Приравняв нулю коэффициенты $\underset{\sigma}{R}_{12},\ \underset{\sigma}{R}{}^2_{112},\ \underset{\sigma}{R}{}^1_{212}$, входящие в уравнения (6), получим систему уравнений с частными производными

$$\underset{\sigma}{R}_{12} = 0, \quad \underset{\sigma}{R}{}^2_{112} = 0, \quad \underset{\sigma}{R}{}^1_{212} = 0. \tag{7}$$

При $k=1$ уравнения (7) являются дифференциальными уравнениями 2-го порядка. При $k=2$ они являются, вообще говоря, уравнениями 3-го порядка.

Очевидно, что в случае, когда каждое из уравнений (7) можно получить из заданного дифференциального уравнения ($1'$) (или ($2'$)) умножением обеих частей заданного уравнения на множитель, рассматриваемая связность определяет представление нулевой кривизны для уравнения (1) (или (2)).

Пример 1. Специальная связность в ${}^*R^1H$ с коэффициентами связности

$$\gamma_1 = \cos\frac{z}{2}, \quad \gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} - \frac{1}{4}p_1, \quad \gamma_{21}^1 = -\frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} + \frac{1}{4}p_1,$$

$$\gamma_2 = \cos\frac{z}{2}, \quad \gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} + \frac{1}{4}p_2, \quad \gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} - \frac{1}{4}p_2$$

определяет представление нулевой кривизны для уравнения синус-Гордона

$$z_{12} = \sin z.$$

В этом случае

$$\widetilde{\omega} = \cos\frac{z}{2}\cdot(dx^1 + dx^2),$$

$$\widetilde{\omega}_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{z}{2} + \frac{1}{2}p_1\right)dx^1 + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{z}{2} + \frac{1}{2}p_2\right)dx^2,$$

$$\widetilde{\omega}_2^1 = -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{z}{2} - \frac{1}{2}p_1\right)dx^1 + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{z}{2} - \frac{1}{2}p_2\right)dx^2.$$

Уравнения (6) имеют вид

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} = 2\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_1^2 \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_2^1,$$

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_1^2 = \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_1^2 + \frac{1}{2}(z_{12} - \sin z)\,dx^1 \wedge dx^2,$$

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_2^1 = \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_2^1 \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} - \frac{1}{2}(z_{12} - \sin z)\,dx^1 \wedge dx^2.$$

Пример 2. Специальная связность в ${}^*R^2H$ с коэффициентами связности

$$\gamma_1 = 0, \qquad \gamma_{1\,1}^2 = z - c, \qquad \gamma_{2\,1}^1 = -1,$$

$$\gamma_2 = -2p_1, \quad \gamma_{1\,2}^2 = -p_{11} - (4c+2z)(z-c), \quad \gamma_{2\,2}^1 = 4c + 2z,$$

где $c = \mathrm{const}$, определяет представление нулевой кривизны для уравнения Кортевега–де Фриза

$$z_2 + 6z\cdot z_1 + z_{111} = 0.$$

В этом случае

$$\widetilde{\omega} = -2p_1\,dx^2,$$

$$\widetilde{\omega}_1^2 = (z-c)dx^1 - (p_{11} + (4c+2z)(z-c))\,dx^2,$$

$$\widetilde{\omega}_2^1 = -dx^1 + (4c+2z)\,dx^2.$$

Уравнения (6) имеют вид

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} = 2\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_1^2 \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_2^1,$$

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_1^2 = \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_1^2 - (z_2 + 6z\cdot z_1 + z_{111})\,dx^1 \wedge dx^2,$$

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_2^1 = \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}_2^1 \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}$$

2. Солитоны уравнений синус-Гордона и Кортевега – де Фриза и связности, определяющие представления нулевой кривизны

В дальнейшем мы условимся обозначать x^1 через x, а x^2 через t. Переменную x будем называть пространственной переменной, а t – временем.

Рассмотрим проблему существования для заданного дифференциального уравнения (1) (или (2)) решения типа бегущей волны, то есть решения вида $z(x-kt)$, где $k=\mathrm{const}$. В особенности интересен случай, когда решение типа бегущей волны является *солитоном*, то есть случай, когда график функции $z(x)$ имеет форму колокола либо подобен графику функции arctgx (или arcctgx).

Справедлива очевидная

Теорема. *Пусть специальная связность в* $^*R^kH$*, коэффициенты связности которой не зависят явно от аргументов* x *и* t*, определяет представление нулевой кривизны для данного уравнения* (1) (*или уравнения* (2)) *и ее система форм связности, рассматриваемая на поднятиях произвольного сечения* (*то есть система форм* $\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}$, $\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}^2_1$, $\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}}{}^1_2$), *при замене неизвестной функции на* $z(x-kt)$ (*где* $z(x)$ *– некоторая наперед заданная функция одного переменного* x) *превращается в систему форм* $\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}$, $\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1$, $\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2$, *которая при* $k=k_0$ (*где* k_0 *– некоторая фиксированная постоянная*)) *удовлетворяет структурным уравнениям группы* $SL(2)$.

Тогда $z(x-k_0t)$ *является решением типа бегущей волны уравнения* (1) (*или уравнения* (2)) *и удовлетворяет начальному условию* $z(x,0)=z(x)$.

Следовательно, можно построить солитон заданного дифференциального уравнения (1) (или (2)), если окажется возможным построить специальную связность, определяющую представление нулевой кривизны, для которой можно подобрать подходящие функцию $z(x)$ и константу k_0. Заметим, что при этом не возникает необходимости привлечения каких-либо физических понятий (таких, например, как «данные рассеяния квантовой частицы в потенциальном поле»).

Пример 3. Приведем пример построения солитона уравнения синус-Гордона $z_{1\,2}=\sin z$ при помощи связности из примера 1 по заданному начальному условию $z(x,0)=z(x)$ (которое мы подберем позднее).

Формы $\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}$, $\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1$, $\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2$ в этом случае имеют вид

$$\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}=\cos\frac{z}{2}\cdot(dx+dt),$$

$$\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1=-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{z}{2}+\frac{1}{2}z'\right)dx+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{z}{2}-\frac{k}{2}z'\right)dt,$$

$$\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2=-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{z}{2}-\frac{1}{2}z'\right)dx+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{z}{2}+\frac{k}{2}z'\right)dt.$$

При этом $z=z(\xi)$, где $\xi=x-kt$ и $z'=dz/d\xi$.

Эти формы удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
&d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}=2\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1\wedge\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2,\\
&d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1=\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}\wedge\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2-\frac{k+1}{2}\sin z\,dx\wedge dt-\frac{k}{2}(z''-\sin z)\,dx\wedge dt,\\
&d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2=\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2\wedge\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}+\frac{k+1}{2}\sin z\,dx\wedge dt+\frac{k}{2}(z''-\sin z)\,dx\wedge dt.
\end{aligned}\tag{8}$$

Здесь $z''=d^2z/d\xi^2$.

Если положить $k=-1$, то система (8) будет иметь вид

$$d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}} = 2\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1 \wedge \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2,$$

$$d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1 = \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}} \wedge \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1 + \frac{1}{2}(z'' - \sin z)\,dx \wedge dt,$$

$$d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2 = \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2 \wedge \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}} - \frac{1}{2}(z'' - \sin z)\,dx \wedge dt$$

Заметим, что $z(x) = 4\mathrm{arctg}\, e^{-x}$ является одним из решений обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \sin z.$$

Очевидно, что в случае, когда $k=-1$ и $z(x) = 4\mathrm{arctg}\, e^{-x}$, система (8) превращается в систему структурных уравнений группы $SL(2)$.

Следовательно, $z(x,t) = 4\mathrm{arctg}\, e^{-(x+t)}$ является солитоном уравнения синус-Гордона.

Пример 4. Приведем пример построения солитона уравнения Кортевега–де Фриза $z_2 + 6z\cdot z_1 + z_{111} = 0$ при помощи связности из примера 2 по заданному начальному условию $z(x,0) = z(x)$ (которое мы подберем позднее).

В этом случае формы $\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}$, $\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1$, $\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2$ имеют вид

$$\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}} = -2z'\,dt,$$

$$\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1 = (z-c)\,dx + (z'' + (4c+2z)(z-c))\,dt,$$

$$\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2 = -dx + (4c+2z)\,dt.$$

При этом $z = z(\xi)$, где $\xi = x - kt$, $z' = dz/d\xi$, $z'' = d^2z/d\xi^2$.

Эти формы удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}} = 2\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1 \wedge \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2,\\ &d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1 = \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}} \wedge \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1 - (z''' + 6z\cdot z' - kz')\,dx \wedge dt,\\ &d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2 = \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2 \wedge \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $z''' = d^3z/d\xi^3$.

Заметим, что функция $z(x) = \dfrac{2c^2}{\mathrm{ch}^2(cx)}$ является одним из решений обыкновенного дифференциального уравнения 3-го порядка

$$\frac{d^3z}{dx^3} + 6z\frac{dz}{dx} = 4c^2\frac{dz}{dx}.$$

В случае, когда $z(\xi) = \dfrac{2c^2}{\mathrm{ch}^2(c\xi)}$, система уравнений (9) имеет вид

$$d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}} = 2\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1 \wedge \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2,$$

$$d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1 = \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}} \wedge \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^2_1 + (k-4c^2)z'\,dx \wedge dt,$$

$$d\underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2 = \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}{}^1_2 \wedge \underset{\sigma}{\overline{\widetilde{\omega}}}$$

и при $k = 4c^2$ превращается в систему структурных уравнений группы $SL(2)$.

Следовательно,

$$z(x,t) = \frac{2c^2}{\mathrm{ch}^2[c(x - 4c^2t)]}$$

является солитоном уравнения Кортевега – де Фриза.

3. Связности Бэклунда и отображения Бэклунда. Связности Лакса. Замечание о построении солитона уравнения Кортевега – де Фриза методом обратной задачи рассеяния

3.1. Специальные связности, при помощи которых можно строить солитонные решения (см. теорему из разд. 2, а также примеры 3 и 4), – это связности в главных расслоениях. Наряду со связностями в главных расслоениях мы будем рассматривать связности в ассоциированных расслоениях. Следуя [1], мы обозначаем символом $P(B,G)$ главное расслоение с базой B и структурной группой G. Ассоциированное с ним расслоение с типовым слоем $\Im$ ($\Im$ – пространство представления структурной группы G) обозначаем через $\Im\,(P\,(B,\,G))$.

Напомним (см., например, [1]), что связность, заданная в главном расслоении $P(B,G)$, порождает связность в ассоциированном расслоении $\Im(P(B,G))$. Формы связности $\widetilde{\theta}^I (I,J,K,\ldots = 1,\ldots,N = \dim\Im)$, соответствующие связности в $\Im(P(B,G))$, имеют вид

$$\widetilde{\theta}^I = dY^I - \xi^I_A\,(Y)\cdot\widetilde{\omega}^A.$$

Здесь $\widetilde{\omega}^A$ – формы связности в $P(B,G)$, $(A,\,B,\ldots = 1,\ldots,\dim G)$, которая порождает связность в $\Im(P(B,G))$. Коэффициенты $\xi^I_A = \xi^I_A(Y^1,\ldots,Y^N)$ удовлетворяют тождествам Ли:

$$\frac{\partial\xi^I_B}{\partial Y^K}\cdot\xi^K_C - \frac{\partial\xi^I_C}{\partial Y^K}\cdot\xi^K_B = \xi^I_A\,C^A_{B\,C},$$

где $C^A_{B\,C}$ – структурные константы группы Ли G.

Формы $\widetilde{\theta}^I$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\widetilde{\theta}^I = \widetilde{\theta}^K \wedge \left(-\frac{\partial\xi^I_A}{\partial Y^K}\widetilde{\omega}^A\right) - \xi^I_A\Omega^A,$$

где Ω^A – формы кривизны, соответствующие связности, заданной в $P(B,G)$.

Связность в ассоциированном расслоении $\Im\left({}^*R^kH\right)$ мы называем *связностью Бэклунда класса* k для заданного дифференциального уравнения (1) (или (2)), если она порождена специальной связностью в ${}^*R^kH$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (1) (или (2)).

Пусть $\underset{\sigma}{\widetilde{\theta}}{}^I$ формы связности Бэклунда для данного уравнения (1) (или (2)), рассматриваемые над сечением $\sigma\subset H$). Очевидно, что система уравнений Пфаффа

$$\underset{\sigma}{\widetilde{\theta}}{}^I = 0 \tag{10}$$

вполне интегрируема в том и только в том случае, когда сечение $\sigma\subset H$ является решением дифференциального уравнения (1) (или (2)).

Система Пфаффа (10) определяет отображение

$$H \supset \sigma \;\to\; \underset{\sigma}{\Sigma} \subset \Im\left({}^*R^kH\right), \tag{11}$$

при котором любое решение $\sigma\subset H$ дифференциального уравнения (1) (или (2)) переходит в сечение $\underset{\sigma}{\Sigma}\subset\Im\left({}^*R^kH\right)$, являющееся решением системы Пфаффа (10) при заданном $\sigma \subset H$. Мы называем отображение (11) *отображением Бэклунда класса* k, а систему (10) – *системой уравнений Пфаффа, определяющей отображение Бэклунда.*

Если $\dim \Im = 1$, система уравнений Пфаффа (10) состоит из одного уравнения. В случае, когда в качестве главных форм выбраны контактные формы, это уравнение Пфаффа эквивалентно системе уравнений с частными производными, которую мы называем *системой Бэклунда.* Примеры отображений Бэклунда при условии $\dim \Im = 1$ можно найти в [8].

3.2. Наряду со связностями Бэклунда в расслоениях с 1-мерными типовыми слоями можно изучать связности Бэклунда в расслоениях с 2-мерными типовыми слоями. Можно, в частности, рассматривать связность Бэклунда в расслоении $L_2^0\left({}^*R^kH\right)$, где L_2^0 – 2-мерное векторное пространство представления группы $SL(2)$ (то есть пространство векторов 2-мерного эквицентроаффинного пространства). Условимся называть ее *связностью Лакса класса* k. Отображение (11) в этом случае будем называть *отображением Лакса.*

В случае, когда в качестве главных форм выбраны контактные формы, система уравнений Пфаффа, определяющая отображение Лакса, эквивалентна системе уравнений с частными производными, которая имеет (при $x^1 = x$, $x^2 = t$) следующий вид

$$
\begin{aligned}
(Y^1)_x &= -\frac{1}{2}\underset{\sigma}{\gamma}{}_1 Y^1 - \underset{\sigma}{\gamma}{}^1_{21} Y^2,\\
(Y^2)_x &= -\underset{\sigma}{\gamma}{}^2_{11} Y^1 + \frac{1}{2}\underset{\sigma}{\gamma}{}_1 Y^2,\\
(Y^1)_t &= -\frac{1}{2}\underset{\sigma}{\gamma}{}_2 Y^1 - \underset{\sigma}{\gamma}{}^1_{22} Y^2,\\
(Y^2)_t &= -\underset{\sigma}{\gamma}{}^2_{12} Y^1 + \frac{1}{2}\underset{\sigma}{\gamma}{}_2 Y^2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Можно убедиться, что для уравнения Кортевега – де Фриза $z_2 + 6z \cdot z_1 + z_{111} = 0$ система (12) эквивалентна системе

$$
\begin{aligned}
y_{xx} &= (c - z)y,\\
y_t &= z_x y - (4c + 2z)y_x,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

известной под названием «пара Лакса».

Замечание 2. Сравним предложенный в разд. 2 (пример 4) метод построения солитона уравнения Кортевега – де Фриза с методом обратной задачи рассеяния [9, 10].

По существу метод обратной задачи рассеяния – это метод построения солитона при помощи не связности, определяющей представление нулевой кривизны (определенной в главном расслоении ${}^*R^2H$), а связности Лакса (определенной в ассоциированном расслоении $L_2^0\left({}^*R^2H\right)$) . Этот метод представляет собой сложную процедуру, состоящую из нескольких этапов (включая, в частности, решение интегрального уравнения Гельфанда – Левитана – Марченко).

Заметим, что в случае, когда нам известно «представление Лакса для уравнения Кортевега – де Фриза» (то есть система (13), эквивалентная системе (12)), нам одновременно известна специальная связность, определяющая представление нулевой кривизны для этого уравнения. Следовательно, можно построить солитон при помощи этой связности, и нет необходимости применять метод обратной задачи рассеяния.

Summary

A.K. Rybnikov. Creation of Solitons for Sine-Gordon and Korteweg – de Vries Equations by Means of Connections Defining the Representations of Zero Curvature.

It is possible to create traveling wave type solutions (and in particular soliton solutions) of partial differential equations by means of connections defining the representations of zero curvature. In this paper we create the solitons of the sine-Gordon equation and the Korteweg – de Vries equation. In the final section we compare the proposed method for soliton creation with the inverse scattering method. We systematically use the Cartan – Laptev invariant analytic method in the work.

Key words: connection in principal bundle, connection in associated bundle, connection defining the representation of zero curvature, differential equation, solitons, Bäcklund maps.

Литература

1. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1972. – Т. 9. – С. 5–246.
2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. *Лаптев Г.Ф.* Теоретико-групповой метод дифференциально- геометрических исследований // Труды 3-го Всесоюз. матем. съезда, М., 1956 г. – М.: Изд-во АН СССР, 1958. – Т. 3. – С. 409–418.
4. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Труды геом. семинара. – М.: ВИНИТИ, 1966. – Т. 1. – С. 139–189.
5. *Лаптев Г.Ф.* Структурные уравнения главного расслоенного многообразия // Труды геом. семинара. – М.: ВИНИТИ, 1969. – Т. 2. – С. 161–178.
6. *Васильев А.М.* Теория дифференциально-геометрических структур. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 190 с.
7. *Рыбников А.К.* О специальных связностях, определяющих представление нулевой кривизны для эволюционных уравнений второго порядка // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 9. – С. 32–41.
8. *Рыбников А.К.* Отображения Бэклунда с точки зрения теории связностей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 4. – С. 93–115.
9. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987. – 479 с.
10. *Новокшенов В.Ю.* Введение в теорию солитонов. – Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002. – 96 с.

Поступила в редакцию
19.06.11

Рыбников Алексей Константинович – кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

E-mail: *arybnikov@mail.ru*